Способи порівняння чисел

Одним із завдань зовнішнього незалежного оцінювання з математики є оцінка вміння порівнювати дійсні числа, які подані в різних формах. Для цього потрібно розташувати числа на координатній прямій. Це легко зробити, якщо число подано у вигляді десяткового дробу, але значно складніше, якщо ми маємо числовий вираз, який містить знак кореня. Під час зовнішнього незалежного оцінювання абітурієнтам забороняється використовувати калькулятори. Але є інший спосіб, за допомогою якого можна це зробити.

Як, наприклад, строго записати те, що число π приблизно дорівнює 3,1415926? Це можна зробити за допомогою нерівностей:

$$3 < \pi < 4$$
$$3{,}1 < \pi < 3{,}2$$
$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$
$$3{,}141 < \pi < 3{,}142$$
$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$$
$$3{,}14159 < \pi < 3{,}14160$$
$$3{,}141592 < \pi < 3{,}141593$$
$$3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$$

Аналогічно можна представити $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ та інші числові вирази, які містять знак кореня.

Як порівняти числа, які мають складний вигляд? Наприклад $3+2\sqrt{2}$ і $\sqrt{34}$. Зведенням у квадрат починаємо прибирати радикали, знак між числами не ставимо (замінюємо його зірочкою), бо невідомо, яке з них більше:

$$\begin{array}{lcl} 3+2\sqrt{2} & * & \sqrt{34} \\ (3+2\sqrt{2})^2 & * & 34 \\ 9+2\cdot3\cdot2\sqrt{2}+8 & * & 34 \\ 17+12\sqrt{2} & * & 34 \\ 12\sqrt{2} & * & 17 \\ (12\sqrt{2})^2 & * & (17)^2 \\ 288 & < & 289. \end{array}$$

Тому $3+2\sqrt{2} < \sqrt{34}$.

Але, якщо ліворуч і праворуч знаходяться від'ємні числа, зводити в квадрат не можна, бо не буде еквівалентності. Тоді нерівність потрібно помножити на -1 та змінити знак. Якщо операція множення на -1 повторюється декілька разів, знак теж змінюється стільки ж разів і це потрібно враховувати.

Наприклад:

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} & * & -\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{5} & * & -2\sqrt{3} \quad \Big| \times(-1) \end{array}$$

$$1+\sqrt{5} \quad * \quad 2\sqrt{3}$$
$$\left(1+\sqrt{5}\right)^2 \quad * \quad \left(2\sqrt{3}\right)^2$$
$$1+2\sqrt{5}+5 \quad * \quad 12$$
$$2\sqrt{5} \quad * \quad 6$$
$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 \quad * \quad 6^2$$
$$20 \quad * \quad 36$$

20 < 36, але знак нерівності змінювався один раз, тому з урахуванням цього: $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} > -\sqrt{3}$.

Але теж саме можна зробити другим способом. Щоб не рахувати, скільки разів повторювалася операція множення на -1, і змінювався знак нерівності, зручніше зробити наступне : від'ємні числа зліва і справа поміняти місцями, тоді знак нерівності не зміниться:

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad * \quad -\sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} \quad * \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$2\sqrt{3} \quad * \quad 1+\sqrt{5}$$
$$\left(2\sqrt{3}\right)^2 \quad * \quad \left(1+\sqrt{5}\right)^2$$
$$12 \quad * \quad 1+2\sqrt{5}+5$$
$$6 \quad * \quad 2\sqrt{5}$$
$$6^2 \quad * \quad \left(2\sqrt{5}\right)^2$$
$$36 \quad * \quad 20$$

36 > 20, тоді $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} > -\sqrt{3}$.

Наведемо приклади тестових завдань, які можна розв'язати з використанням цього способу:

1. Серед чисел $a=\sqrt{5}-2$, $b=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$, $c=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ укажіть *усі* додатні.

А	Б	В	Г	Д
a	*c*	*a; b*	*a; c*	*a; b; c*

2. Укажіть правильну нерівність, якщо $a=5\sqrt{2}$, $b=7$, $c=\sqrt{51}$.

А	Б	В	Г	Д
$b<a<c$	$a<b<c$	$c<a<b$	$a<c<b$	$b<c<a$

3. Порівняйте числа: 4; $2\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{5}<4<\sqrt{17}$	$4<\sqrt{17}<2\sqrt{5}$	$\sqrt{17}<2\sqrt{5}<4$	$4<2\sqrt{5}<\sqrt{17}$	$2\sqrt{5}<\sqrt{17}<4$

Оцінка можливого значення квадратного кореня

В тестових завданнях інколи (наприклад, під час розв'язання квадратного рівняння) виникає необхідність швидкого обчислення квадратного кореня з відносно невеликого числа (3- або, рідше, 4-цифрового). У більшості випадків корінь є цілим числом, яке можна знайти досить швидко і, звісно, без використання калькулятора. Що для цього треба зробити?

Спочатку нагадаємо, що числа, які закінчуються на «0» та «5», досить легко підносити до квадрата.

$$30^2 = 900;$$

$$70^2 = 4900;$$

(Підносимо до квадрата число **без цифри «0»** і дописуємо до результату «00»)

$$35^2 = 1225;$$

$$85^2 = 7225;$$

(Число **без цифри «5»** помножуємо на наступне натуральне число і дописуємо до результату «25». У нашому випадку:

$3 \cdot 4 = 12,$ $35^2 = 1225;$

$8 \cdot 9 = 72,$ $85^2 = 7225.$

Тепер перейдемо до нашої основної задачі – знаходження кореня з даного нам числа. Розглянемо цей процес на прикладі числа 1849.

1. Дізнаємося, чи може дане число взагалі бути повним квадратом.

Для цього треба лише пам'ятати (або швидко підрахувати), що квадрати цілих чисел можуть закінчуватися лише на одну з наступних цифр: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Тобто, якщо число закінчується на 2, 3, 7 або 8, воно точно не є повним квадратом.

В нашому випадку: число 1849 закінчується цифрою «9», тому **може** бути повним квадратом.

2. Оцінимо число зверху і знизу відомими повними квадратами.

Простіше за все оцінювати повними квадратами, які можна швидко знайти, – квадратами чисел, що закінчуються на «0» та «5».

Число 1849 більше за 1600, що є квадратом числа 40, але менше за число 2025, яке є квадратом числа 45.

$$1600 < 1849 < 2025;$$

$$40^2 < 1849 < 45^2.$$

Тому

$$40 < \sqrt{1849} < 45.$$

3. За останньою цифрою даного числа знайдемо останню цифру його кореня (у припущенні, що цей корінь є цілим числом).

Остання цифра числа	Остання цифра його кореня	Остання цифра числа	Остання цифра його кореня
0	0	5	5
1	1	6	4
	9		6
4	2	9	3
	8		7

У нашому випадку: остання цифра числа 1849 – «9», тому остання цифра його кореня може бути або «3», або «7» (тільки вони в квадраті дають числа, що закінчуються на «9»).
Оскільки шуканий корінь знаходиться в проміжку від 40 до 45, то єдиним можливим варіантом стає число 43.

4. Обов'язково перевіряємо наше припущення множенням.
Оскільки ми всюди виходили з **припущення**, що дане число є повним квадратом, у нас немає гарантії того, що так воно і є.
У нашому випадку: якщо число 1849 є повним квадратом, то тільки числа 43.
Піднесенням числа 43 до квадрата ми переконуємося в тому, що знайшли вірну відповідь.
Отже, $\sqrt{1849} = 43$.

Описаний метод працює і для більших чисел. Знайдемо, наприклад, $\sqrt{11664}$.

1. Остання цифра даного числа – «4». Отже, число 11664 **може бути** повним квадратом.
2. $110^2 = 12100;$

$105^2 = 11025;$

$11025 < 11664 < 12100;$

$105^2 < 11664 < 110^2;$

$105 < \sqrt{11664} < 110.$

3. Число 11664 закінчується на «4», тому $\sqrt{11664}$ може закінчуватися на «2» або «8». В проміжку від 105 до 110 цій умові задовольняє тільки число 108.
4. Перевіримо множенням. Дійсно, $108^2 = 11664$.

Отже, $\sqrt{11664} = 108.$

Метод добування квадратного кореня «вручну»
(без допомоги калькулятора)

У ході розв’язування деяких математичних задач доводиться проводити операції з квадратними коренями. Одразу ж виникає спокуса дістати калькулятор і натиснути на клавішу добування квадратного кореня. Але є метод, який дозволяє зробити цю операцію «вручну».

Для початку візьмемо ціле число, наприклад 223729. Зробимо наступне:

1) розіб’ємо число справа наліво на розряди по дві цифри у розряді за допомогою штрихів: 223729 → 22'37'29'. Якщо число має непарну кількість цифр, додаємо нуль до першої цифри зліва. Наприклад:

4765983 → 04'76'59'83';

2) внесемо число під знак радикала: 22'37'29'→ $\sqrt{22'37'29'} = ...$

Почнемо обчислювати корінь, обробляючи кожен розряд покроково зліва направо, отримуємо по одній цифрі результату.

Крок 1 – добування квадратного кореня з недостачею з першого розряду:

$$\sqrt{22} = 4 \text{ (з недостачею),}$$

оскільки $4^2 = 16$, а $5^2 = 25$.

Підсумком кроку 1 є перша цифра шуканого числа:

$$\sqrt{22'37'29'} = 4\ldots$$

Крок 2 – першу отриману цифру підносимо до квадрата, записуємо під першим розрядом, ставимо знак мінус і віднімаємо:

$$\begin{array}{l} \_\sqrt{22'37'29'} = 4\ldots \\ \quad \underline{16} \\ \quad\;\; 6 \end{array}$$

Крок 3 – дописуємо праворуч до результату віднімання дві цифри наступного розряду і ліворуч від отриманого числа ставимо вертикальну риску:

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\_\sqrt{22'37'29'} = 4\ldots} \\ \multicolumn{2}{l}{\quad \underline{16}} \\ & 637 \\ & \end{array}$$

Потім цифри, які знаходяться після знака = , множимо на 2 і дописуємо ліворуч від вертикальної риски. Поруч з отриманим числом залишаємо вільні місця, на яких ставимо зірочки :

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{2}{l}{\_\sqrt{22'37'29'} = 4\ldots} \\ \multicolumn{2}{l}{\quad \underline{16}} \\ 8\,* & 637 \\ * & \end{array}$$

Зірочка позначає пошук цифри, яка буде другою в шуканому числі. Замість зірочки необхідно підібрати дві однакові цифри таким чином, щоб результат добутку був не більше ніж 637. У нашому випадку це цифра 7, бо
87·7 = 609<637, але 88 ·8 = 704 > 637. Тому:

$$
\begin{array}{rl}
 & -\sqrt{22'37'29'} = 47... \\
 & \underline{16} \\
\times\ \begin{array}{r} 87 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{|l} 637 \\ \underline{609} \end{array}
\end{array}
$$

Підведемо горизонтальну риску і під нею запишемо результат віднімання: 637 – 609 = 28. Далі повторюємо крок 3:

$$
\begin{array}{rl}
 & -\sqrt{22'37'29'} = 473 \\
 & \underline{16} \\
\times\ \begin{array}{r} 87 \\ 7 \end{array} & \begin{array}{|l} 637 \\ \underline{609} \end{array} \\
\times\ \begin{array}{r} 943 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|l} 2829 \\ \underline{2829} \end{array} \\
 & \quad\quad 0
\end{array}
$$

Результат отриманий без остачі. Якщо в результаті отримуємо остачу, тоді після знайдених цифр ставимо кому, записуємо замість наступного розряду два нулі і продовжуємо добувати корінь з потрібною точністю. Наприклад:

$$
\begin{array}{rl}
 & -\sqrt{17} = 4{,}123\ldots \\
 & \underline{16} \\
\times\ \begin{array}{r} 81 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{|r} 100 \\ \underline{81} \end{array} \\
\times\ \begin{array}{r} 822 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{|r} 1900 \\ \underline{1644} \end{array} \\
\times\ \begin{array}{r} 8243 \\ 3 \end{array} & \begin{array}{|r} 25600 \\ \underline{24729} \end{array} \\
 & \quad\quad 871\ldots
\end{array}
$$

Таким чином, ми маємо метод, за допомогою якого можна обчислювати квадратні корені без допомоги калькулятора.